4. Passzív optikai rezonátorok

A lézerek létrehozásához nem elegendő csak koherens erősítőt építeni, mert az erősítő működtetéséhez ekkor a belépő fluxussűrűséget valamilyen külső forrásból állandóan biztosítanunk kell. Ehelyett célszerű az erősítőt elhagyó egyszer már felerősödött fényt visszacsatolni a közegbe. Erre a feladatra látszik alkalmasnak a passzív optikai rezonátor, mely reflektáló felületekkel rendelkező üreg. Az üregben az elektromágneses térnek a határfeltételekkel meghatározott állapotai létezhetnek csak, melyeket módusoknak neveznek.

A lézereknél használt rezonátorok az általános üregtől (pl. amit a mikrohullámú technikában is használnak) jelentősen különböznek, mivel 1) általában hiányoznak az üreg oldalsó határoló felületei, vagyis a rezonátorok nyitottak; 2) a rezonátor mérete nagyságrendekkel meghaladja a lézer hullámhosszát. A lézerek hullámhossza u.i tipikusan 0,1 .. 10-20 μm, ami rezonátorhossznak túl kicsi lenne a megfelelő erősítés biztosításához.

A nyitottság miatt bármely módusnak a rezonátorban elkerülhetetlenül vesztesége lesz, az energia egy része el fogja hagyni az üreget.

A nyitott rezonátorban csak az optikai tengely közelében koncentrálódó módusoknak lesz elegendően kicsi a vesztesége, a többi igen gyorsan ki fog szóródni. A nyitottság előnyösen használható pl. az aktív anyag oldalirányból való gerjesztésére is (lásd előző fejezet 3.13. ábra).

Szokás definiálni a rezonátoroknál az ún. jósági tényezőt, mely

$$Q \underset{\text{def}}{\equiv} \frac{2\pi}{\textit{energiaveszteség egy ciklusban}}. \tag{19}$$

A jósági tényező a következő alakba írható:

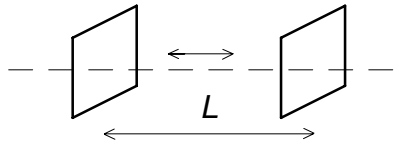
$$\boxed{Q = \frac{\nu}{\Delta\nu_r},} \tag{20}$$

ahol $\Delta\nu_r$ a módusok frekvencia szerinti félértékszélessége a rezonátorban. A frekvencia szerinti kiszélesedés a veszteség miatt lép fel, annál nagyobb, minél nagyobb a veszteség. Így a jósági tényező pedig akkor nagy értékű, ha kicsi a vesztesége a módusnak, mivel Q fordítva arányos $\Delta\nu_r$-rel.

4.1. Rezonátortípusok

A legismertebb rezonátortípusokat ismertetjük. A tükrök lehetnek négyszögletesek vagy kerekek, sík vagy rádiuszos tükrök, távolságuk néhány cm-től néhány méter lehet, a tükörátmérő tipikus értéke néhány mm - től néhány cm - ig terjed.

1.)Sík *II*-os (Fabry-Perot) rezonátor



Az eredő tér két ellenkező irányban haladó hullám szupepoziciójaként kialakuló állóhullám, melynek hullámhosszát megadja az

$$L = n\frac{\lambda}{2}, \tag{21}$$

ahol *n* pozitív egész szám. A lehetséges frekvenciák pedig

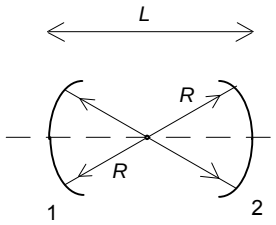
$$\boxed{\nu_n = \frac{c}{\lambda} = n\frac{c}{2L}.} \tag{22}$$

Ha abból indulnánk ki, hogy a módus fennmaradásának szükséges feltétele, hogy egy körüljárás után a fáziskülönbség 0 (vagy $2\pi n$) legyen, ugyanerre az eredményre jutnánk, mert:

$$2\pi n = k \cdot 2L \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

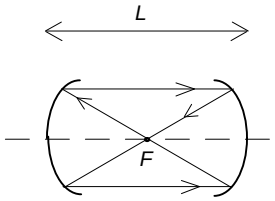
2.) Koncentrikus vagy szférikus rezonátor



$L = 2R$

Két ellenkező irányban haladó gömbhullám szuperpozíciója. A rezonáns frekvenciák megegyeznek a Fabry-Perot rezonátoréval.

3.) Konfokális rezonátor

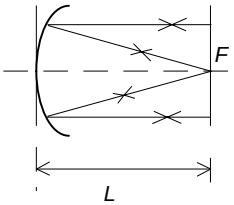


$L = R, \quad F_1 = F_2 \quad (R_1 = R_2 = R)$

Az ábrán a geometriai optikai sugármenetet tüntettük fel. A módusok se nem sík, se nem gömbhullámok lesznek, a rezonáns frekvenciák egyszerű módon nem adhatók meg.

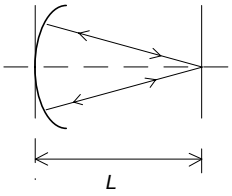
4.) Sík és gömbtükör kombinációk

hemikonfokális



$L = R/2$

hemiszférikus

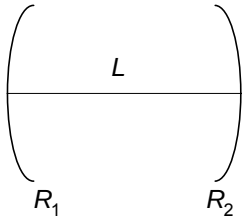


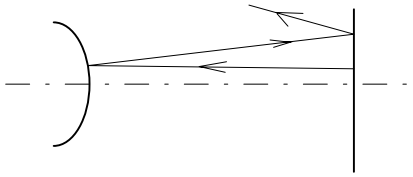
$L = R$

A geometria meghatározza a lehetséges módusok térkitöltését, befolyásolja az erősítés értékét, hatással van a kilépő fény terjedési tulajdonságaira (nyalábátmérő, divergencia).

5.) Általános rezonátor

Az általános rezonátor két tetszőleges rádiuszú tükörből áll egymástól *L* távolságra. Két kategóriája különböztethető meg: vannak stabil és instabil rezonátorok. Instabil egy rezonátor, ha a sugár a tükrök közötti oda-vissza verődésekor a rezonátor tengelyéből ki divergál, pl.:



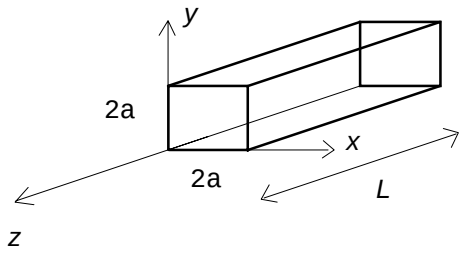


4.1 ábra Instabil rezonátor.

A továbbiakban a stabil rezonátorok két fontos típusával, a sík *II*-os rezonátorral és a konfokális rezonátorral foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy minden stabil, legalább egy rádiuszos tükröt tartalmazó általános rezonátor leírása visszavezethető egy vele ekvivalens konfokális rezonátor leírására.

4.2. Sík *II*-os rezonátor, frekvenciák közelítő meghatározása

Közelítőleg meghatározzuk a sík *II*-os rezonátor lehetséges frekvenciáit. Zárt négyzetes hasáb alakú rezonátor esetén (2*a* a négyzet egy oldala, *L* a hasáb magassága) az állóhullámú feltételből kiindulva meghatározhatók a lehetséges frekvenciák.



$$2a = l\frac{\lambda}{2} \quad k_x = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{l\pi}{2a} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$$

$$\lambda = \frac{4a}{l} \quad k_y = \frac{m\pi}{2a} \quad k_z = \frac{n\pi}{L}$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$\nu = \frac{ck}{2\pi} = \frac{c}{2}\left[\left(\frac{n}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{l}{2a}\right)^2\right]^{1/2}$$

A nyitott rezonátorban csak olyan módusok lehetségesek, melyekre $m,l << n$, egyébként túl nagy lenne a diffrakciós veszteség. A gyakorlatban m,l értéke ~ 0, ezért jó közelítéssel teljesül a frekvenciára a

$$\nu \cong \frac{c}{2}\left(\frac{n}{L}+\frac{L}{2n}\frac{m^2+l^2}{4a^2}\right) \tag{23}$$

összefüggés. A zárójelben lévő második tag is elhanyagolhatóan kicsi a gyakorlatban, ezért az egyszerű megfontolásokból nyert (22) összefüggés szerint számíthatók a síkpárhuzamos rezonátorban a módusok lehetséges frekvenciái. Két egymás melletti módus frekvenciakülönbsége pedig

$$\boxed{\Delta\nu_n = \frac{c}{2L},} \tag{24}$$

azaz csak a fénysebesség és a tükrök távolságának a függvénye. Pl. L = 0,5 m esetén

$$\Delta\nu_n = 3\cdot 10^8 s^{-1} = 300\,\text{MHz} \tag{25}$$

azaz tipikusan néhányszor 100 MHz. Ha pl. a frekvencia $5\cdot 10^{14}\,s^{-1}$ (a hullámhossz 0,6 μm) (22) alapján n is kiszámítható

$$n = \frac{2L}{c}\nu = \frac{5\cdot 10^{14}}{3\cdot 10^8} = 1{,}7\cdot 10^6. \tag{26}$$

A módusok téreloszlása a síkpárhuzamos rezonátorban csak numerikusan határozható meg és mint látni fogjuk, a gyakorlatban ez a rezonátorfajta csak ritkán használatos, mert a két síktükör egymástól adott távolságban való párhuzamban tartása gépészetileg nehezen kivitelezhető feladat és kis szöghiba esetén már instabillá válik a rezonátor.

4.3 Konfokális rezonátor

A konfokális rezonátorban a módusok téreloszlása analitikusan is meghatározható. A számítás mellőzésével megadjuk az x és y irányú téreloszlást, $U_{m,l}$ - et a tükrökön:

$$U_{ml}(x,y) = H_m H_l \exp\left[-\frac{\pi}{L\lambda}\left(x^2+y^2\right)\right] \tag{27}$$

ahol H_m és H_l m és l - edrendű Hermite-polinomok. A legegyszerűbb esetben, ha $m = l = 0$, a módusnak megfelelő téreloszlás Gauss - függvény

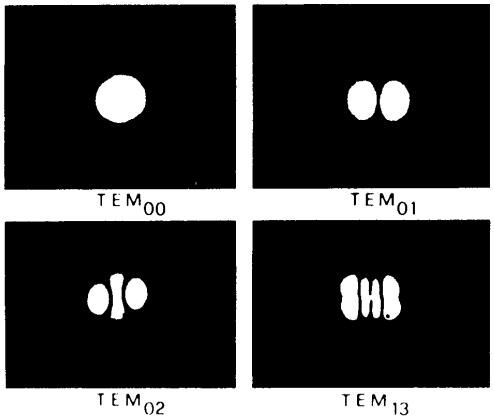
$$U_{00}(x,y) = \exp\left[-\frac{\pi}{L\lambda}\left(x^2+y^2\right)\right] \qquad H_0 = 1 \tag{28}$$

Az amplitúdó 1/e-ad részére esik akár x, akár y irányban, ha

$$x = y = w_s = \left(\frac{\lambda L}{\pi}\right)^{1/2} \tag{29}$$

w_s (s - spot angol szó kezdőbetűjéből) a foltsugár a tükrön.

A transzverzális módusok jelölésére a TEM_{ml} használata terjedt el a "transzverzális elektromos és mágneses" elnevezés kezdőbetűkből következően. A 4.2. ábrán néhány módus jellegzetes intenzitáseloszlását lehet látni.



4.2. ábra Néhány módus intenzitáseloszlása.

A konfokális rezonátorban az amplitúdó-eloszlás a rezonátor belsejében is bármely helyen felírható. Válasszuk a koordinátarendszer középpontjául a rezonátor közepét. Jelölje $w(z)$ az amplitúdó 1/e - ad részének távolságát az optikai tengelytől. $w(z)$ definíció szerint a nyalábsugár. A rezonátor tengelye mentén, azaz a z távolság függvényében a nyalábsugár

$$w(z) = w_0\left[1+\left(2z/L\right)^2\right]^{1/2} \tag{30}$$

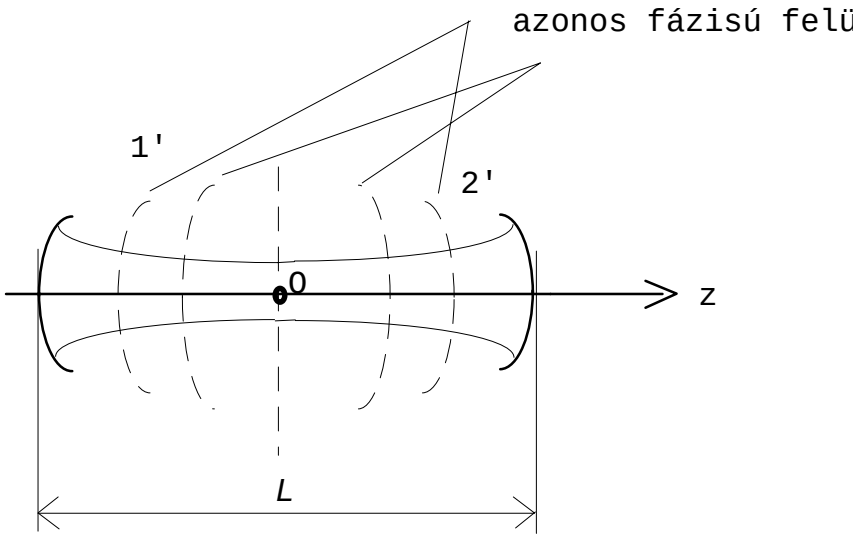
alakba írható, ahol w_0 a minimális nyalábsugár, a "nyalábderék" a $z = 0$ -ban. w_0 éppen $(2)^{1/2}$ -ed része (29) - nek

$$w_0 = \left(\lambda L/2\pi\right)^{1/2}. \tag{31}$$

A Gauss - nyaláb leginkább egy gömbhullámhoz hasonlít. Az azonos fázisú felületek közelítőleg gömbfelületek. A fázisfelület görbületi sugara a z tengely mentén

$$R(z) = z\left[1+\left(L/2z\right)^2\right] \tag{32}$$

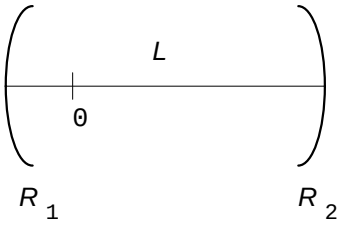
alakba írható. A rezonátor közepén és a végtelenben sík a fázisfelület, míg egy tetszőleges helyen (32) alapján számítható a görbületi sugár. A tükrökön, azaz a $z = L / 2$ helyen a görbület éppen megegyezik L - lel, azaz a konfokális geometria miatt a tükör görbületi sugarával. Emiatt, ha az azonos fázisú felületek helyére a rezonátoron belül, a fázisfronti görbületnek megfelelő rádiuszú tükröt helyezünk, a téreloszlás nem fog megváltozni (lásd 4.3. ábra). Elhelyezhetünk egy tükröt az 1' helyre, egyet pedig a 2' helyre, az eredményül kapott rezonátor már nem lesz konfokális rezonátor, mégis ugyanaz marad a foltméret és a téreloszlás. Az egyik tükör, ha a $z = 0$ helyre tesszük, akár sík is lehet. Ezért elmondható, hogy bármely legfeljebb csak egy sík tükröt tartalmazó általános rezonátorban meghatározható az amplitudóeloszlás egy ekvivalens téreloszlást adó konfokális rezonátor segítségével.



4.3 ábra Azonos fázisú felületek a konfokális rezonátorban.

4.4 Általános rezonátor

Az előzőek alapján bármely legalább egy rádiuszos tükröt tartalmazó általános rezonátor tárgyalását a következőképpen végezhetjük.



Megkeressük az elrendezésnek megfelelő ekvivalens konfokális rezonátort az

$$R_1 = z_1\left[1+\left(\frac{L_e}{2z_1}\right)^2\right] \qquad R_2 = z_2\left[1+\left(\frac{L_e}{2z_2}\right)^2\right] \tag{33}$$

$$z_1 + z_2 = L$$

egyenletek megoldása alapján. A három egyenlet három ismeretlent (z_1, z_2 és L_e) tartalmaz. A számítás menete a következő: meg kell határozni pl. R_1 távolságát a 0 - tól, ezután pedig az ekvivalens konfokális rezonátor hosszát (L_e - t)!

Speciális esetben, pl. szimmetrikus rezonátorra

$$R_1 = R_2 = R$$

$$L_e^2 = (2R - L)L, \quad \text{mert} \quad z = \frac{L}{2} \tag{34}$$

4.5 Stabilitási feltétel

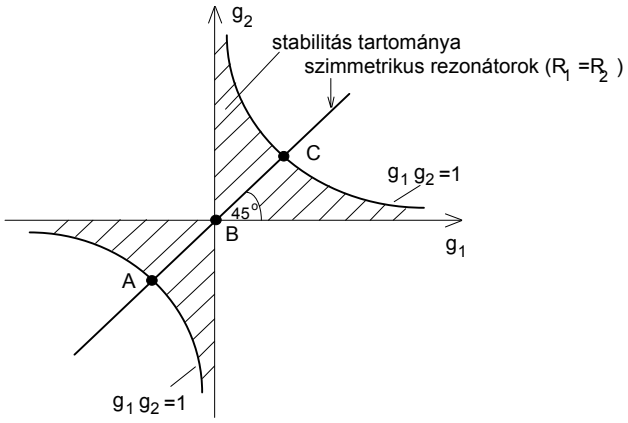
Vezessük be a következő paramétereket

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1}, \quad g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}. \tag{35}$$

Bizonyítás nélkül a rezonátor stabilitásának feltétele a

$$0 < g_1 g_2 < 1 \tag{36}$$

egyenlőtlenség teljesülése (4.4 ábra).



4.4 ábra A stabil rezonátorok a bevonalkázott területen belül vannak.

Három határeset:
A.) $g_1 = g_2 = -1$
$L = 2R$
koncentrikus rezonátor
B.) $g_1 = g_2 = 0$
$L = R$
konfokális rezonátor
C.) $g_1 = g_2 = 1$
$R = \infty$
plán-paralell rezonátor

A.) hátránya, hogy igen kicsi a foltméret a rezonátor közepén, rendkívül érzékeny, ezért ritkán használják; B.) esetén is kicsi a nyalábméret; C.) instabil, de jó térkitöltésű! A leggyakrabban használt rezonátorok két nagy rádiuszú ((2-10) x L), vagy egy sík és egy nagy rádiuszú tükörrel készülnek.

4.6 Gauss-nyaláb terjedése szabad térben

A rezonátorból kilépő TEM_{00} nyaláb szabad térben való terjedését vizsgáljuk. Ehhez szükséges, hogy *w(z)* és *R(z)* kifejezésébe L helyére w_0 - t írjunk.

$$w_o = \left(\frac{L\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} \rightarrow L = w_o^2 \frac{2\pi}{\lambda} \tag{37}$$

$$w(z) = w_o \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_o^2}\right)^2\right]^{1/2} \tag{38}$$

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{\pi w_o^2}{\lambda z}\right)^2\right]$$

ahol z a nyaktól mért távolság, *R(z)* az azonos fázisú pontok görbülete. Adott λ - ra és z - nél w és R csak w_0 - tól függ. A nyalábnyaktól távol

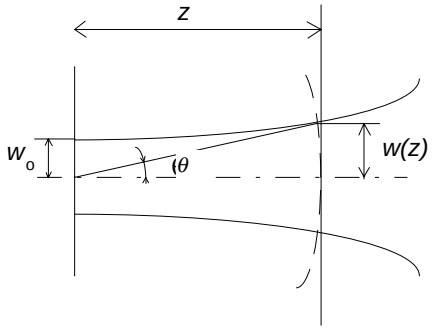
$$\lambda z / \pi w_o^2 >> 1 \tag{39}$$

$$w(z) = \frac{\lambda z}{\pi w_o} R(z) = z$$

$w(z)$ hiperbola, melynek aszimptótája

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_o} \tag{40}$$

szöget zár be a z tengellyel (4.5 ábra).



4.5 ábra Gauss-nyaláb terjedése szabad térben.

θ a lézernyaláb divergenciája, tipikus értéke gázlézereknél néhány mrad.

4.7 Gauss-nyaláb formálása

A lézerek alkalmazásához meg kell tudni határozni a nyaláb transzformációját különböző optikai rendszeren való áthaladás esetén. Tekintsük most a legegyszerűbb esetet, mikor a Gauss - nyaláb vékony lencsén halad át. Ismeretes az

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \tag{41}$$

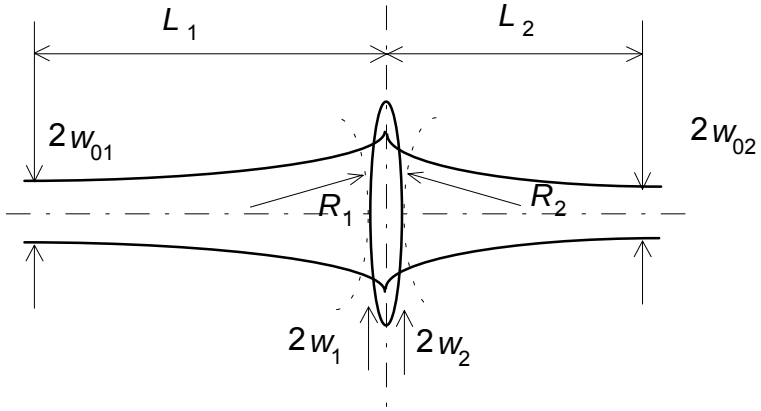
összefüggés, ahol t a tárgytávolság, k a képtávolság és f a lencse fókusztávolsága. Gömbhullámok esetén a lencsétől R_1 távolságból kiinduló R_1 görbületi sugarú nyaláb a lencse túloldalán újra összegyűlik. A transzformált gömbhullám görbületi sugara, R_2 meghatározható az

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f} \tag{42}$$

összefüggés alapján.

Jó közelítéssel a Gauss - nyaláb lencsén való áthaladását is leírhatjuk a gömbhullámok áthaladásának ismeretében a lencsét érő R görbületi sugár transzformációjának meghatározásával. A Gauss - nyaláb esetén azonban még fontos azt is meghatározni, hogy a lencse túloldalán a lencsétől milyen távolságban lesz az új nyalábnyak, vagyis az a hely a Gauss - nyalábban, ahol minimális a nyalábsugár és sík a hullámfront. Tekintsük a 4.6 ábra szerinti esetet. Legyen a beeső nyaláb minimális sugara w_{01}, a nyalábnyak helye legyen L_1 távolságra az f fókuszú lencsétől. A lencsén a beeső nyaláb görbületi sugára R_1 és a nyalábsugár

w_1. A lencse után a módosult nyalábnyak mérete w_{02}, ami L_2 távolságra került a lencsétől, míg a kilépő nyaláb görbületi sugara R_2, nyalábsugara w_2.



4.6 ábra Gauss-nyaláb transzformációja vékony lencsén való áthaladáskor.

(38) alapján belátható, hogy w_1 és R_1 felírható, mint w_{01} és L_1 függvénye. A vékony lencsén való áthaladáskor a nyalábsugár nem fog megváltozni, ezért

$$w_1 = w_2 \qquad (43)$$

és R_2 - t (42) alapján lehet meghatározni. R_2 ismeretében (38) alapján meghatározható az új nyalábnyak helye és mérete.

A lézerek alkalmazásakor a leggyakrabban fókuszálásra vagy a párhuzamosság növelésére van szükség. A fókuszálás tulajdonképpen a nyalábnyak csökkentése, konkrét esetben fentiek alapján számolható. Vigyázni kell azonban azzal, hogy a lencse nem a nyalábnyak helyét transzformálja a (41) összefüggés alapján, hanem (42) és (38) összefüggések használatára van szükség a nyalábnyak helyének meghatározására. A divergencia csökkentése a nyalábsugár növelésével érhető el, hiszen (40) összefüggés szerint a divergencia és a nyalábnyak szorzata állandó egy adott hullámhossznál.